

# אלגברה לינארית

## פרק 7 - העתקות ליניאריות

### תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות.....1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות.....3
3. העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם.....6
4. פעולות עם העתקות ליניאריות.....10

## העתקות ליניאריות

### שאלות

בשאלות 1-15, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{(2)}$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \textbf{(3)}$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{(4)}$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \textbf{(5)}$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(6)}$$

$$T(A) = A + A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(7)}$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(8)}$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(9)}$$

$$T(A) = A^{-1} ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(10)}$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; \quad T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad \textbf{(11)}$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(12)}$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad \textbf{(13)}$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad \textbf{(14)}$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad \textbf{(15)}$$

**16** עבור איזה ערך של הקבוע  $m$  (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

**17**  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  כך ש-  $T(1,1,0) = (1, 2, 3)$ ,  $T(0,1,1) = (4, 5, 6)$ ,  $T(0,0,1) = (7, 8, 9)$

**18**  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  כך ש-  $T(1,0,1) = (1,1,0)$ ,  $T(0,1,1) = (1, 2, 1)$ ,  $T(0,0,1) = (0,1,1)$

**19**  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  כך ש-

$$T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1), T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0), T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

**20**  $T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$  כך ש-  $T(1) = 4$ ,  $T(4x + x^2) = x$ ,  $T(1-x) = x^2 + 1$

$$T(1, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3)$$

**21** נתונה העתקה ליניארית  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , המקיימת:

$$T(0, 1, 0) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$T(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

**22** נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  קבוצה בת"ל, אז  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה בת"ל.

ב. אם  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה בת"ל, אז  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  קבוצה בת"ל.

## תשובות סופיות

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1) כן  | 2) כן  | 3) לא  | 4) לא  | 5) לא  |
| 6) כן  | 7) כן  | 8) לא  | 9) לא  | 10) לא |
| 11) כן | 12) כן | 13) כן | 14) לא | 15) לא |
| 16) כן | 17) כן | 18) כן | 19) כן | 20) כן |

21) שאלת הוכחה. 22) שאלת הוכחה.

## גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצאו :

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^3 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר תמונתה נפרשת על ידי: } \{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}.$$

$$(8) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^4 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: } \{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}.$$

נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow U$ .

$$(9) \quad \text{הוכיחו כי אם } \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T) \text{ אז הממד של } V \text{ זוגי.}$$

(10) הוכיחו או הפריכו :

א. קימת העתקה ליניארית  $T: R^5 \rightarrow R^5$  שעבורה  $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$ .

ב. קימת העתקה ליניארית  $T: R^4 \rightarrow R^4$  שעבורה  $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$ .

**11** ידוע שהעתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ , מקיימת:  $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$ ,  $\dim(W) = 4$ .  
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של  $V$ ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

**12** הוכיחו או הפריכו:

- א. לכל העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$  מתקיים  $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$ .  
 ב. לכל העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$  שמקיימת:  
 $T = T^2$ , מתקיים  $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^2)$ ,  $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^2)$ .  
 ג. לכל העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ , המקיימת  $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ , אז בהכרח  $T = 0$ .

**13** מטריצה  $A_{m \times n}$  מגדירה העתקה  $T: R^n \rightarrow R^m$ ;  $T(x) = Ax$ ,  
 ואילו  $A_{n \times m}^T$  מגדירה העתקה  $S: R^m \rightarrow R^n$ ;  $S(y) = A^T y$ .  
 הראו כי  $\operatorname{Im}(T) = (\operatorname{Ker}(S))^\perp$ .

## תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס :  $\{(0,0,1,4)\}$ , מימד : 1. תמונה – כל בסיס של  $\mathbb{R}^3$ , מימד : 3.

(2) גרעין – בסיס :  $\{(0,0,0)\}$ , מימד : 0.

תמונה – בסיס :  $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$ , מימד : 3.

(3) גרעין – בסיס :  $\{(-7,3,0,1), (1,-2,1,0)\}$ , מימד : 2.

תמונה – בסיס :  $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$ , מימד : 2.

(4) גרעין – בסיס :  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ , מימד : 2.

תמונה – בסיס :  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ , מימד : 2.

(5) גרעין – בסיס :  $\{p(x)=1\}$ , מימד : 1.

תמונה – בסיס :  $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$ , מימד : 2.

(6) גרעין – בסיס :  $\{p(x)=1\}$ , מימד : 1.

תמונה – בסיס :  $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$ , מימד : 3.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

(10) לא.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

## העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

### שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבעו האם היא חח"ע,<sup>1</sup> האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה. כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: R^4 \rightarrow R^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: U \rightarrow V. \text{ הוכיחו:}$$

- א. אם  $\dim(U) < \dim(V)$ , אז  $T$  לא על.
- ב. אם  $\dim(U) > \dim(V)$ , אז  $T$  לא חח"ע.
- ג. אם  $\dim(U) = \dim(V)$ , אז  $T$  חח"ע  $\Leftrightarrow T$  על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: V \rightarrow W. \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$

- א. אם  $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$ , אז ההעתקה  $T$  אינה על.
- ב. אם  $\dim \text{Ker}(T) = 0$  ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  היא על.
- ג. אם  $\dim \text{Ker}(T) = 0$  ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  היא על.
- ד. אם  $\dim(V) < \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  חח"ע.

<sup>1</sup> הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ ;  $\{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ .  
הוכח או הפרך:

א. אם  $\dim(V) > \dim(W)$  ואם  $T(v_1) = 0$ , אז ייתכן מקרה שבו  $T$  חח"ע.

ב. אם  $\dim(V) > \dim(W)$ , הקבוצה  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל.

(9) נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ .

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  קבוצה בת"ל ב- $V$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $T$  חח"ע, אז הקבוצה  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל ב- $W$ .

ב. אם הקבוצה  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל ב- $W$ , אז  $T$  חח"ע.

(10) נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^m$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $T$  היא איזומורפיזם אז  $m = n$ .

ב. אם  $m > n$ , אז  $T$  חח"ע.

ג. אם  $T(v) = Av$  לכל  $v$ , אז למטריצה  $A$  יש  $n$  שורות ו- $m$  עמודות.

(11) נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ , המקיימת  $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $T$  על, אז בהכרח  $V = \{0\}$ .

ב. אם  $T$  חח"ע, אז בהכרח  $V = \{0\}$ .

ג.  $T$  היא איזומורפיזם.

ד.  $T$  היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^m$ , ונתונה מטריצה  $A_{m \times n}$ ,

כך ש- $T(v) = Av$  לכל  $v \in R^n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $v \in \text{Ker}(T)$ , אז  $v \in \text{rowsp}(A)$ .

ב. אם  $v \in \text{rowsp}(A)$ , אז  $v \in \text{Ker}(T)$ .

ג. אם  $v \in \text{colsp}(A)$ , אז  $v \in \text{Im}(T)$ .

ד. אם  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , אז  $n < m$ .



**13** נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^n$ , ונתונה מטריצה  $A$ ,

כך ש-  $T(v) = Av$ , לכל  $v \in R^n$ .

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם  $\text{rank}(A) = n$ , אז  $T$  חח"ע.

ב. אם  $\text{rank}(A) = n$ , אז  $T$  על.

ג. אם  $T^2(v) = 0$ , אז  $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$ .

ד. אם  $T^2(v) = 0$ , אז  $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$ .

**14** נתונה העתקה ליניארית  $T: P_3[R] \rightarrow R$ , המוגדרת על ידי  $T(p(x)) = p(1)$ .

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור  $T: P_n[R] \rightarrow R$ .

**15** נתונה העתקה ליניארית  $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$ , המוגדרת על ידי  $T(A) = A^T$ .

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של  $T$ .

## תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = 3$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, \dots, -1+x^n\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = n$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$(15) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{Im}(T) = M_n[R]$$

$$\text{ב. חח"ע ועל. } T^{-1}(A) = A^T \text{ ג.}$$

## פעולות עם העתקות ליניאריות

### שאלות

בשאלות 1-9, תהייה  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ו-  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקות ליניאריות המוגדרות על ידי:  $S(x, y, z) = (x - z, y)$ ,  $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$ .

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

- |             |              |                |           |          |
|-------------|--------------|----------------|-----------|----------|
| (1) $S + T$ | (2) $4S$     | (3) $4S - 10T$ | (4) $TS$  | (5) $ST$ |
| (6) $T^2$   | (7) $T^{-1}$ | (8) $T^{-2}$   | (9) $S^2$ |          |

### תשובות סופיות

- (1) לא ניתן להגדיר.
- (2)  $4S = 4(x - z, y)$
- (3) לא ניתן להגדיר.
- (4) לא ניתן להגדיר.
- (5)  $ST: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $St(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$
- (6)  $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$
- (7)  $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x, -y, 17x - 4y - z)$
- (8)  $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$
- (9) לא ניתן להגדיר.